Lösen von Gleichungssystemen mit dem TI89

Bestimme eine ganzrationale Funktion f dritten Grades mit folgenden Eigenschaften:
(1) Der Graph von f verläuft durch den Koordinatenursprung.
(2) P(5|100) ist ebenfalls Punkt des Funktionsgraphen.
(3) Der Graph von f hat an der Stelle 5 einen Hochpunkt.
(4) An der Stelle 2 liegt ein Wendepunkt.

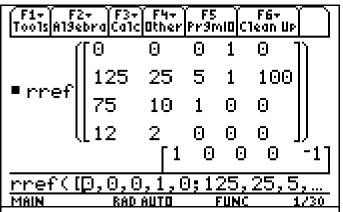
1. Methode: Verwenden der Koeffizientenmatrix und des rref-Befehls
Mit dem Ansatz $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ und den Ableitungen $f'(x)=3ax^2+2bx+c$ und $f''(x)=6ax+2b$ kann das folgende lineare Gleichungssystem aufgestellt werden:

$$\begin{aligned} f(0)&=0 \\ f(5)&=100 \\ f'(5)&=0 \\ f''(2)&=0 \end{aligned} \quad \text{bzw.} \quad \begin{aligned} d&=0 \\ 125a+25b+5c+d&=100 \\ 75a+10b+c&=0 \\ 12a+2b&=0 \end{aligned}$$

Die Koeffizienten des Gleichungssystems können zu einem Schema angeordnet werden:

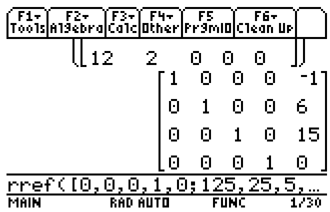
$$\begin{array}{ccccc|} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 125 & 25 & 5 & 1 & 100 \\ 75 & 10 & 1 & 0 & 0 \\ 12 & 2 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

Die Eingabe ist zwar etwas mühsam, erspart aber viel Rechnerei: rref steht für *row reduced form.*

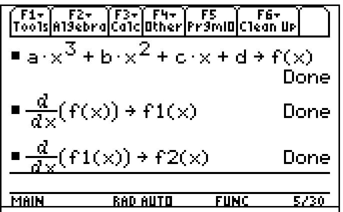
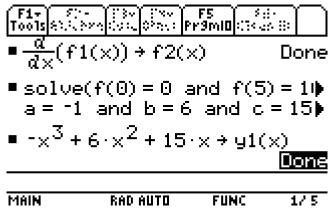
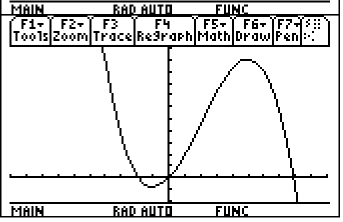


Nach Abschluss der Eingabe mit $\boxed{\text{Enter}}$ kann die Lösung des Gleichungssystems abgelesen werden. Die Matrix steht für:

$$\begin{aligned} 1a+0b+0c+0d&=-1 \\ 0a+1b+0c+0d&=6 \\ 0a+0b+1c+0d&=15 \\ 0a+0b+0c+1d&=0 \end{aligned} \quad \text{bzw.} \quad \begin{aligned} a&=-1 \\ b&=6 \\ c&=15 \\ d&=0 \end{aligned}$$



2. Methode: Verwendung des solve-Befehls

<table>
<tr><td>Hier werden zunächst die Funktion f(x),
die erste Ableitungsfunktion f1(x) und
die zweite Ableitungsfunktion f2(x) definiert.</td><td>
</td></tr>
<tr><td>Der Befehl zur Lösung des Gleichungssystems lautet:
solve(f(0)=0 and f(5)=100 and f1(5)=0 and f2(2)=0, {a,b,c,d})
Nach Bestätigung mit der Eingabetaste erhalten wir die Lösung: a=-1 and b=6 and c=15 and d=0.
Zur graphischen Darstellung des Funktionstermes wird die Lösungsfunktion definiert.</td><td>
</td></tr>
<tr><td>Mit geeignete Fenstergrenzen (ausprobieren!) ...</td><td>
</td></tr>
<tr><td>... zeichnen wir der Graph von f.</td><td>
</td></tr>
</table>