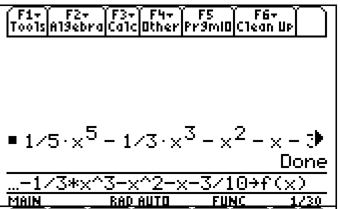
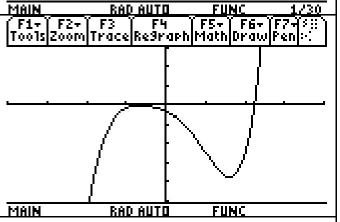
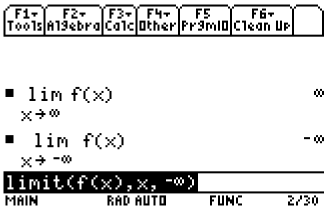
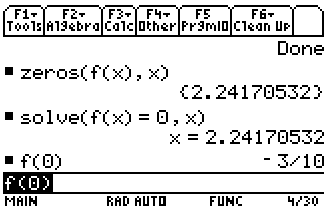
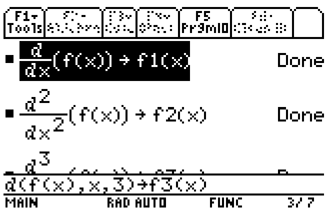
Funktionsuntersuchung mit dem TI89

> Gegeben ist die Funktion f durch $f(x)=\frac{1}{5}x^5-\frac{1}{3}x^3-x^2-x-\frac{3}{10}$.
> Führen Sie eine vollständige Untersuchung der Funktion mithilfe des TI89 durch.

Zunächst wird der Funktionsterm eingegeben und als f(x) gespeichert. Die Funktion ist für alle reellen Zahlen x definiert.	
Für einen schnellen Überblick zeichnen wir den Graphen der Funktion.	
1. Symmetrie Der Funktionsterm enthält sowohl gerade als auch ungerade Potenzen von x. Also ist der Graph von f weder achsensymmetrisch zur y-Achse noch punktsymmetrisch zum Ursprung.	
2. Verhalten an den Rändern des Definitionsbereiches Da $f(x)=x^5\cdot\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{3x^2}-\frac{1}{x^3}-\frac{1}{x^4}-\frac{3}{10x^5}\right)$, gilt $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ und $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$.	
3. Gemeinsame Punkte mit den Koordinatenachsen 1. Achse: $f(x)=0 \Leftrightarrow x=2{,}24...$ (Es kann der Befehl *zeros* oder der *solve*-Befehl verwendet werden. Beide können mit $\boxed{\text{F2}}$ im Algebra-Menü aufgerufen werden. Beachte: Hier findet der TI89 nur eine Näherungslösung! Warum?) 2. Achse: $f(0)=-\frac{3}{10}$ Ergebnisse: $S_x(0\,\vert\,2{,}24...)$ und $S_y(-\frac{3}{10}\,\vert\,0)$	
Ableitungen Für die Bestimmung von Extrem- und Wendepunkten müssen die benötigten Ableitungen eingegeben werden. $f'(x)=x^4-x^2-2x-1$ $f''(x)=4x^3-2x-2$ $f'''(x)=12x^2-2$	

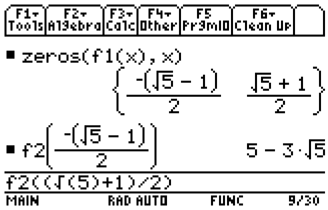
4. Extrempunkte

Notwendige Bed.: $f'(x)=0 \Leftrightarrow x=\frac{1-\sqrt{5}}{2} \vee x=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$
(Befehl: zeros)

Hinreichende Bed.: $f'(x)=0 \wedge f''(x)\neq 0$ (Berechnung mit TI)

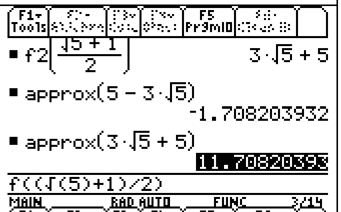
$$f''\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)=5-3\sqrt{5}\approx -1{,}708<0$$

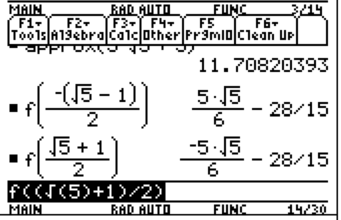
$$f''\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)=5+3\sqrt{5}\approx 11{,}708>0$$



Ergebnis: Also liegt an der Stelle $x=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ ein lok. Hochpunkt und an der Stelle $x=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ ein lok. Tiefpunkt vor.

$$H\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\,\middle|\,\frac{5\sqrt{5}}{6}-\frac{28}{15}\right);\ T\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\,\middle|\,\frac{-5\sqrt{5}}{6}-\frac{28}{15}\right)$$





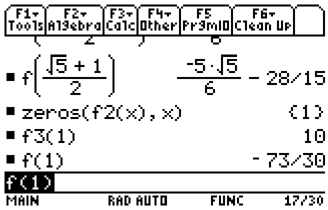
5. Wendepunkte

Notwendige Bed.: $f''(x)=0 \quad \Leftrightarrow x=1$ (Befehl: zeros)

Hinreichende Bed.: $f''(x)=0 \wedge f'''(x)\neq 0$

$f'''(1)=1\neq 0$ (Berechnung mit TI)

Ergebnis: An der Stelle $x=1$ liegt ein Wendepunkt vor. $W\left(1\,\middle|\,-\frac{73}{30}\right)$



6. Wertemenge

Aufgrund der Extrema und des Verhaltens an den Rändern des Definitionsbereichs ist der Wertebereich die Menge der reellen Zahlen. $ID = IR$

Zur Dokumentation des Lösungsweges bei Verwendung des TI89:

Der Lösungsweg muss nachvollziehbar dargestellt werden!
Dazu gehört insbesondere:

- Alle Ansätze werden notiert und falls sie nicht unmittelbar einsichtig sind zusätzlich erläutert.
- Die verwendeten Befehle des TI89 werden in Kurzform aufgelistet.
- Die Begründungen für die einzelnen Rechenschritte und alle Ergebnisse werden in vollständigen Sätzen notiert.
- Die Graphen der gezeichneten Funktionen werden sorgfältig vom Display des Rechners ins Heft übertragen. Dabei müssen die charakteristischen Punkte eindeutig erkennbar sein.