# Aufgabe 1
a)

#1: $f(x) := a \cdot b^x$

#2: $\text{SOLVE}\left(\left[f(1) = 8,\ f(4) = \frac{1}{8}\right],\ [a,\ b],\ \text{Real}\right)$

#3: $$\left[a = 32 \wedge b = \frac{1}{4}\right]$$

#4: $f(x) := 32 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^x$

#5: $f(x) := 32 \cdot ê^{\text{LN}(0.25) \cdot x}$

b)

#6: $f(x) := 2 \cdot ê^{\text{LN}(10) \cdot x}$

#7: $f1(x) := 2 \cdot \text{LN}(10) \cdot ê^{\text{LN}(10) \cdot x}$

c) Die Euler-Zahl e ist die Basis bei der stetigen Verzinsung, die Basis der Exponentialfunktion, die sich beim Ableiten reproduziert sowie der Grenzwert

#8: $$\lim_{r \to \infty} \left(1 + \frac{1}{r}\right)^r = ê$$

d) Bei stetiger Verzinsung mit dem angegeben Kapital und Zinssatz gilt:

#9: $K(t) := 1580 \cdot ê^{0.035 \cdot t}$

#10: $K(0) = 1580$

#11: $K(1) = 1636.279139$

#12: $K(3) = 1754.922764$

#13: $K\left(\frac{16}{3}\right) = 1904.256252$

Berechnung der Verdopplungszeit für das Kapital:

#14: $3160 = 1580 \cdot ê^{0.035 \cdot t}$

#15: $2 = ê^{0.035 \cdot t}$

#16: $\text{LN}(2) = 0.035 \cdot t$

#17: $\frac{\text{LN}(2)}{0.035} = t$

#18: $19.80420515 = t$

Das Kapital verdoppelt sich bei stetiger Verzinsung in etwa 19.8 Jahren.

#19: $K1(t) := 1580 \cdot 1.035^t$

#20: $3160 = 1580 \cdot 1.035^t$

#21: $t = \dfrac{\mathrm{LN}(2)}{\mathrm{LN}\left(\dfrac{207}{200}\right)}$

#22: $t = 20.14879168$

Bei jährlicher Verzinsung beträgt die Verdopplungszeit etwa 20.1 Jahre.

e) Der Graph der natürlichen Exponentialfunktion ist streng monoton steigend und linksgekrümmt. Er verläuft oberhalb der x-Achse und hat keine Extrem- oder Wendepunkte. Er schneidet die y-Achse im Punkt (0|1). Dort hat er die Steigung 1.

f) Tangentengleichungen:

#23: $t1(x) := x + 1$

#24: $f(x) := ê^{x}$

#25: $t2(x) := f'(10)\cdot(x - 10) + f(10)$

#26: $t2(x) := ê^{10}\cdot(x - 9)$

#27: SOLVE(t2(x) = t1(x), x, Real)

#28: $x = \dfrac{9\cdot ê^{10} + 1}{ê^{10} - 1}$

#29: $x = 9.000454019$

#30: $t1(9.000454019) = 10.00045401$

Die beiden Tangenten schneiden sich etwa im Punkt (9|10).

g) Die Wachstumsfunktion lautet (Die Zeit t wird dabei in Wochen angegeben.) :

#31: $n(t) := 10000\cdot 1.5^{t}$

Zuwachs in 6 Wochen:

#32: $n(6) - n(0) = 1.0390625\cdot 10^{5}$

#33: $\dfrac{n(6) - n(0)}{n(0)}\cdot 100 = 1039.0625$

Der Zuwachs in den ersten 6 Wochen beträgt 103906 Tiere. Dies sind etwa 1039% des Anfangsbestandes.
Berechnung der Verdopplungszeit:

#34: $2 = 1.5^{t}$

#35: $t = \dfrac{\mathrm{LN}(2)}{\mathrm{LN}(1.5)}$

#36: $t = 1.709511291$

Der Bestand verdoppelt sich etwa alle 1.7 Wochen.
Die momentane Wachstumsgeschwindigkeit nach 4 Wochen beträgt etwa 20526 Tiere pro Woche.

#37: $n'(4) = 2.052667109\cdot 10^{4}$

## Aufgabe 3

1) Löse die Steckbriefaufgabe mithilfe eines Gleichungssystems:

a)

#1: $f(x) := a\cdot x^3 + b\cdot x^2 + c\cdot x + d$

#2: SOLVE([f(0) = 2, f′(0) = -1, f′′(0) = 3, f′′′(0) = -2], [a, b, c, d])

#3: $\left[a = -\frac{1}{3} \wedge b = \frac{3}{2} \wedge c = -1 \wedge d = 2\right]$

#4: $f(x) := -\frac{1}{3}\cdot x^3 + \frac{3}{2}\cdot x^2 - x + 2$

b)

#5: $f(x) := a\cdot x^4 + b\cdot x^3 + c\cdot x^2 + d\cdot x + e$

#6: $\mathrm{SOLVE}\left(\left[f(0) = -4,\ f'(0) = \frac{1}{2},\ f''(0) = \sqrt{2},\ f'''(0) = 0,\ f''''(0) = -1\right], [a, b, c, d, e]\right)$

#7: $\left[a = -\frac{1}{24} \wedge b = 0 \wedge c = \frac{\sqrt{2}}{2} \wedge d = \frac{1}{2} \wedge e = -4\right]$

#8: $f(x) := -\frac{1}{24}\cdot x^4 + \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot x^2 + \frac{1}{2}\cdot x - 4$

2) Hier gebe ich nur die Kontrollergebnisse an, wie sie auch der TI erzeugt. Taylorpolynome zu Funktionen, die sich leicht ableiten lassen, sollte man auch ohne den TI bestimmen können!

#9: $\mathrm{TAYLOR}(\sqrt{(1 + x^2)}, x, 0, 2) = \frac{x^2}{2} + 1$

#10: $\mathrm{TAYLOR}(x^2 + ê^{-x}, x, 0, 4) = \frac{x^4}{24} - \frac{x^3}{6} + \frac{3\cdot x^2}{2} - x + 1$

#11: $\mathrm{TAYLOR}(\mathrm{SIN}(x^2), x, 0, 2) = x^2$

#12: $\mathrm{TAYLOR}(\mathrm{COS}(x)^2, x, 0, 4) = \frac{x^4}{3} - x^2 + 1$

#13: $\mathrm{TAYLOR}(\mathrm{LN}(\mathrm{COS}(x)), x, 0, 4) = -\frac{x^4}{12} - \frac{x^2}{2}$

#14: $\mathrm{TAYLOR}(ê^{\mathrm{SIN}(x)}, x, 0, 4) = -\frac{x^4}{8} + \frac{x^2}{2} + x + 1$

**Aufgabe 4** *Befüllung einer französischen Halbkugeltasse (Bol)*

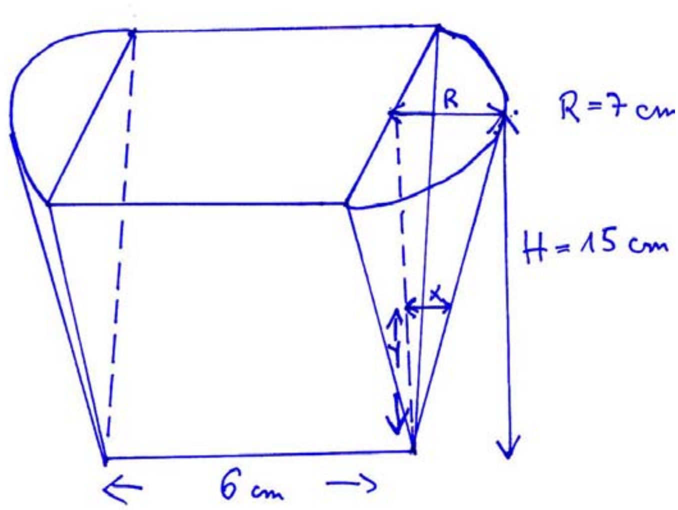
Die Kettenregel der Differentialrechnung lautet in diesem Fall: $\frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dh} \cdot \frac{dh}{dt}$.

Für die Ableitung $\frac{dV}{dh} = 2 \cdot \pi \cdot r \cdot h - \pi \cdot h^2$ erhält man mit den gegebenen Werten $24 \cdot \pi\,\text{cm}^2$. Damit ergibt sich für die momentane Änderungsrate $\frac{dh}{dt}$ der Wert 0.265...cm/s.

Mithilfe des Satzes des Pythagoras ergibt sich für den momentanen Radius x der Flüssigkeitsoberfläche $x^2 = R^2 - (R - h)^2$ $A = \pi \cdot x^2 = \pi \cdot (2Rh - h^2)$.

Die Kettenregel der Differentialrechnung ergibt mit: $\frac{dA}{dt} = \frac{dA}{dh} \cdot \frac{dh}{dt}$ und den obigen Zwischenschritten $\frac{dA}{dt} = 10\pi cm \cdot 0.265\frac{cm}{s}$ = 8.33... $\text{cm}^2$ /s.

**Aufgabe 5** *Entleerung eines Kaffeefilters*




$V_{Filter}(x,y) = V_{Prisma} + V_{Kegel} = 6A_{Dreieck} + V_{Kegel} = 6xy + \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot x^2 \cdot y$.

Mit der Nebenbedingung $x = \frac{R}{H} \cdot y = \frac{7}{15} y$ (Ähnlichkeit) ergibt dies den Funktionsterm $V(y) = \frac{42}{15} y^2 + \frac{49}{675} \cdot \pi \cdot y^3$.

Die Kettenregel der Differentialrechnung lautet in diesem Fall: $\frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dy} \cdot \frac{dy}{dt}$.

$\frac{dV}{dy} = \frac{84}{15} y + \frac{49}{225} \pi \cdot y^2$ ergibt mit y = 2 den Wert 13.936...$\text{cm}^2$ und damit für die Pegelgeschwindigkeit $\frac{dy}{dt} = \frac{2cm^3 / s}{13.936...cm^2}$ =0.143...cm/s.