Aufgabe 1 *Rund um die Exponentialfunktion*

a) Bestimme eine Exponentialfunktion so, dass ihr Graph durch die Punkte $P(1\,|\,8)$ und $Q(4\,|\,\frac{1}{8})$ verläuft. Gib den Funktionsterm auch mit der Basis e an.

b) Schreibe als Exponentialfunktion mit der Basis e und leite ab: $f(x) = 2 \cdot 10^x$

c) Was ist die Euler-Zahl?

d) Ein Kapital von 1580€ wird über den Zeitraum von 1 Jahr (3 Jahren, 5 Jahren und 4 Monaten) zu einem Zinssatz von 3,5% bei einer Bank angelegt. Die Verzinsung erfolgt stetig. Es erfolgen keine weiteren Ein- oder Auszahlungen.
Wie groß ist das Guthaben am Ende des Anlagezeitraumes?
Wann hat sich das Kapital verdoppelt? Vergleiche mit der Verdopplungszeit, wenn die Zinsen nur einmal jährlich gutgeschrieben werden.

e) Nenne besondere Eigenschaften des Graphen der natürlichen Exponentialfunktion f mit $f(x) = e^x$.

f) In welchem Punkt schneiden sich die Tangenten an den Graphen der Funktion f mit $f(x) = e^x$ an den Stellen x=0 und x=10?

g) In einem Gebiet vermehrt sich ein Heuschreckenschwarm exponentiell, und zwar wöchentlich um 50%. Man geht von einem Anfangsbestand von 10.000 Tieren aus.
Wie lautet die zugehörige Wachstumsfunktion?
Welcher Zuwachs ist in 6 Wochen zu erwarten? Um wie viel Prozent hat sich der Bestand dabei vergrößert.
Wann hat sich die Anzahl der Heuschrecken verdoppelt (versechzehnfacht)?
Wie groß ist die momentane Wachstumsgeschwindigkeit nach 4 Wochen?

Aufgabe 2 *Kurvendiskussion von Exponential- und Logarithmusfunktionen*

a) Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = 10x \cdot e^{-\frac{1}{2}x^2}$.
Gib den Definitionsbereich von f an. Untersuche den Graphen der Funktion auf Symmetrie, Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen, Extrem- und Wendepunkte.

b) Gegeben ist die Funktionenschar f_t mit $f_t(x) = 10x \cdot e^{-\frac{1}{2}t \cdot x}$ für $t > 0$.
   i) Gib den Definitionsbereich von f an. Untersuche den Graphen der Funktion auf Symmetrie, Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen, Extrem- und Wendepunkte.
   ii) Bestimme die Gleichung der Ortskurve der Extrem- und Wendepunkte.
   iii) Nun sei t=1. Die Punkte $O(0\,|\,0)$, $P(a\,|\,0)$ und $Q(a\,|\,f_1(a))$ sind Eckpunkte eines Dreiecks. Für welches a>0 ist der Flächeninhalt des Dreiecks am größten?

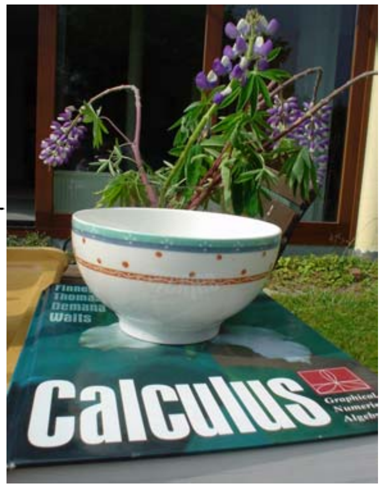
c) Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = -10\dfrac{\ln(x)}{x^2}$.
   i) Gib den Definitionsbereich von f an. Untersuche den Graphen der Funktion auf Symmetrie, Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen, Extrem- und Wendepunkte.
   ii) Die Wendetangente begrenzt mit den Koordinatenachsen ein Flächenstück im 4. Quadranten. Berechne dessen Flächeninhalt.

d) Gegeben ist die Funktionenschar f_t mit $f_t(x) = \dfrac{\ln(x)}{t \cdot x}$ für $0 < t \le 1$.
Gib den Definitionsbereich von f an. Untersuche den Graphen der Funktion auf Symmetrie, Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen, Extrem- und Wendepunkte.

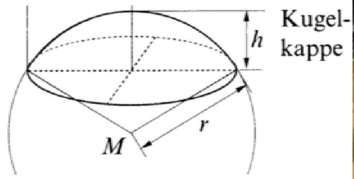
Aufgabe 3 *Taylorreihen*

1) Welche ganzrationale Funktion f n-ten Grades genügt den folgenden Bedingungen?
   a) n=3; f(0)=2, f'(0)=-1, f''(0)=3, f'''(0)=-2
   b) n=4; f(0)=-4, f'(0)=1/2, f''(0)=√2, f'''(0)=0, f''''(0)=-1
2) Gib die ganzrationale Funktion n-ten Grades an, die mit der Funktion f an der Stelle x=0 im Funktionswert und den ersten n Ableitungen übereinstimmt.
   a) $f(x)=\sqrt{1+x^2};n=2$ b) $f(x)=x^2+e^{-x};n=4$ c) $f(x)=\sin x^2;n=2$
   d) $f(x)=\cos^2 x;n=4$ e) $f(x)=\ln(\cos x);n=4$ f) $f(x)=e^{\sin x};n=4$

Aufgabe 4 *Befüllung einer französischen Halbkugeltasse (Bol)*



Franzosen trinken ihren Kaffee aus einer Bol. Dies ist eine halbkugelförmige Tasse ohne Henkel. Unsere Bol hat den Radius 7cm. Sie wird mit 20cm^3 heißem Kaffee pro Sekunde gefüllt.
Wie groß ist die Pegelgeschwindigkeit des Kaffees, wenn die Flüssigkeitshöhe gerade 2cm beträgt?



Das Volumen einer Kugelkappe mit dem Kugelradius R und der Höhe h kann mit der Formel $V_{Kugelkappe}=\frac{1}{3}\pi\cdot h^2\cdot(3r-h)$ berechnet werden.
Mit welcher Geschwindigkeit ändert sich bei dieser Füllhöhe die Oberfläche?

Aufgabe 5 *Entleerung eines Kaffeefilters* (Für Spezialisten!)

Ein realistischer Kaffeefilter besteht aus einem Prisma mit zwei seitlich angesetzten Halbkegeln. Die Maße des Filters können der Zeichnung entnommen werden. Aus dem Filter fließen 2cm^3 Kaffee pro Sekunde heraus.
Wie groß ist die Pegelgeschwindigkeit des Kaffees, wenn die Flüssigkeitshöhe im Filter gerade 2cm beträgt?