

Der Schatten der Pyramiden - Lösung

Teil A: Der Schatten der Chephrenpyramide auf der x-y-Ebene

Eine quadratische Pyramide mit den Eckpunkten A1, A2, A3, A4 und S wirft in parallelem Licht in Richtung des Vektors v einen Schatten auf die x-y-Ebene.

```
#1: [A1 := [4, 0, 0], A2 := [0, 4, 0], A3 := [-4, 0, 0], A4 := [0, -4, 0], S := [0, 0, 6]]
```

```
#2: v := [5, -5, -3]
```

Aufgabe 1

Zeichne den über die Pyramidenspitze einfallenden Lichtstrahl und die Pyramide. Verwende die Hilfsfunktion Dreieck(a, b, c) für die Pyramide.

Der über die Pyramidenspitze einfallende Lichtstrahl wird durch die Gerade g0 beschrieben:

```
#3: g0 := S + r·v
```

Zum Zeichnen:

1. Pyramide (Dazu wird die Hilfsfunktion Dreieck verwendet):

```
#4: Dreieck(a, b, c) :=  $\begin{bmatrix} a & b \\ b & c \\ c & a \end{bmatrix}$ 
```

```
#5: [Dreieck(A1, A2, S), Dreieck(A2, A3, S), Dreieck(A3, A4, S), Dreieck(A4, A1, S)]
```

2. Lichtstrahl über die Pyramidenspitze (Hier wird g0 nicht vereinfacht eingegeben. Um den Ausdruck zeichnen zu können, muß im Graphik-Fenster im Menü Extras die Option Vereinfachen vor dem Zeichnen aktiviert sein):

```
#6: g0
```

Aufgabe 2

Berechne den Schatten im Sand der x-y-Ebene und ergänze ihn in der Abbildung.

Die Gerade g0 schneidet die x-y-Ebene. Dabei ist z=0.

```
#7: 6 - 3·r = 0
```

```
#8: r = 2
```

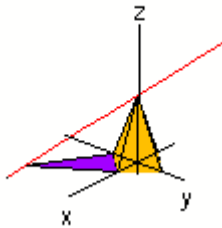
Durch Substitution von r=2 in g0 erhält man den Schnittpunkt SP1:

```
#9: SP1 := SUBST(g0, r, 2)
```

```
#10: SP1 = [10, -10, 0]
```

Zeichnung des Schattens in der x-y-Ebene:

```
#11: Dreieck(A1, SP1, A4)
```



Teil B: Der Schatten der Chephrenpyramide auf der Cheopspyramide

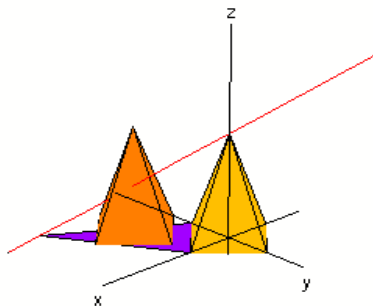
Nun ist der Schatten auf der benachbarten Cheopspyramide zu berechnen. Die Vorderseite dieser Pyramide ist beschrieben durch:

```
#12: [B1 := [8, -6, 0], B2 := [4, -2, 0], B3 := [0, -6, 0], B4 := [4,
      -10, 0], K := [4, -6, 6]]
```

Aufgabe 3

Kopiere die Graphik aus Aufgabe 2 und füge die Cheopspyramide ein.

```
#13: [Dreieck(B1, B2, K), Dreieck(B2, B3, K), Dreieck(B3, B4, K),
      Dreieck(B4, B1, K)]
```



Aufgabe 4

Berechne den Schatten der Chephrenpyramide auf der Cheopspyramide und zeichne ihn ein.

Der Punkt L ist der Schnittpunkt des Lichtstrahls g_0 mit der durch die Vorderseite der Cheopspyramide beschriebenen Ebene E_1 .

```
#14: E1 := B1 + t1 · (K - B1) + t2 · (B2 - B1)
```

```
#15: E1 = g0
```

```
#16: SOLVE(E1 = g0, [r, t1, t2])
```

```
#17: [ r = 1 ∧ t1 = 1/2 ∧ t2 = 1/4 ]
```

Durch Substitution von $r=1$ in g_0 erhält man den Schnittpunkt L:

```
#18: L := SUBST(g0, r, 1)
```

```
#19: L = [5, -5, 3]
```

Punkt M ist der Schnittpunkt der Geraden g_1 und g_2 :

$$\#20: g1 := A1 + t1 \cdot (SP1 - A1)$$

$$\#21: g2 := B1 + t2 \cdot (B2 - B1)$$

$$\#22: SOLVE(g1 = g2, [t1, t2])$$

$$\#23: \left[t1 = \frac{1}{2} \wedge t2 = \frac{1}{4} \right]$$

$$\#24: M := SUBST\left(g1, t1, \frac{1}{2}\right)$$

$$\#25: M = [7, -5, 0]$$

Der Punkt U ist der Schnittpunkt der Geraden durch B2 und K mit der Ebene E2, die SP1, A4, S enthält:

$$\#26: g3 := B2 + r \cdot (K - B2)$$

$$\#27: E2 := SP1 + t1 \cdot (S - SP1) + t2 \cdot (A4 - SP1)$$

$$\#28: SOLVE(E2 = g3, [r, t1, t2])$$

$$\#29: \left[r = \frac{11}{20} \wedge t1 = \frac{11}{20} \wedge t2 = \frac{1}{20} \right]$$

$$\#30: U := SUBST\left(g3, r, \frac{11}{20}\right)$$

$$\#31: U = \left[4, -\frac{21}{5}, \frac{33}{10} \right]$$

Der Punkt V ist der Schnittpunkt der Geraden durch SP1 und A4 mit der Geraden durch B2 und B3:

$$\#32: g4 := SP1 + r \cdot (A4 - SP1)$$

$$\#33: g5 := B2 + t \cdot (B3 - B2)$$

$$\#34: SOLVE(g4 = g5, [r, t])$$

$$\#35: \left[r = \frac{7}{8} \wedge t = \frac{11}{16} \right]$$

$$\#36: V := SUBST\left(g4, r, \frac{7}{8}\right)$$

$$\#37: V = \left[\frac{5}{4}, -\frac{19}{4}, 0 \right]$$

Zum Zeichnen:

1. Chephrenpyramide (ausgefüllt):

$$\#38: [Dreieck(A1, A2, S), Dreieck(A2, A3, S), Dreieck(A3, A4, S),$$

Dreieck(A4, A1, S)]

2. Cheopspyramide (Polygonzug):

#39: [B1, B2, B3, B4, B1, K, B3, B2, K, B4]

3. Schatten auf der Cheopspyramide(ausgefüllt):

#40: Viereck(a, b, c, d) :=
$$\begin{bmatrix} a & b \\ b & c \\ c & d \\ d & a \end{bmatrix}$$

#41: [Viereck(L, M, B2, U), Dreieck(U, B2, V)]

4. Schatten auf der x-y-Ebene (Polygonzug):

#42: [M, A1, A4, V, B2, M]

5. Lichtstrahl über die Spitze der Chephrenpyramide:

#43: [SUBST(g0, r, -2), L]

