Eine ganzrationale Funktionenschar - Lösung

Die Funktionschar f_k ist gegeben durch

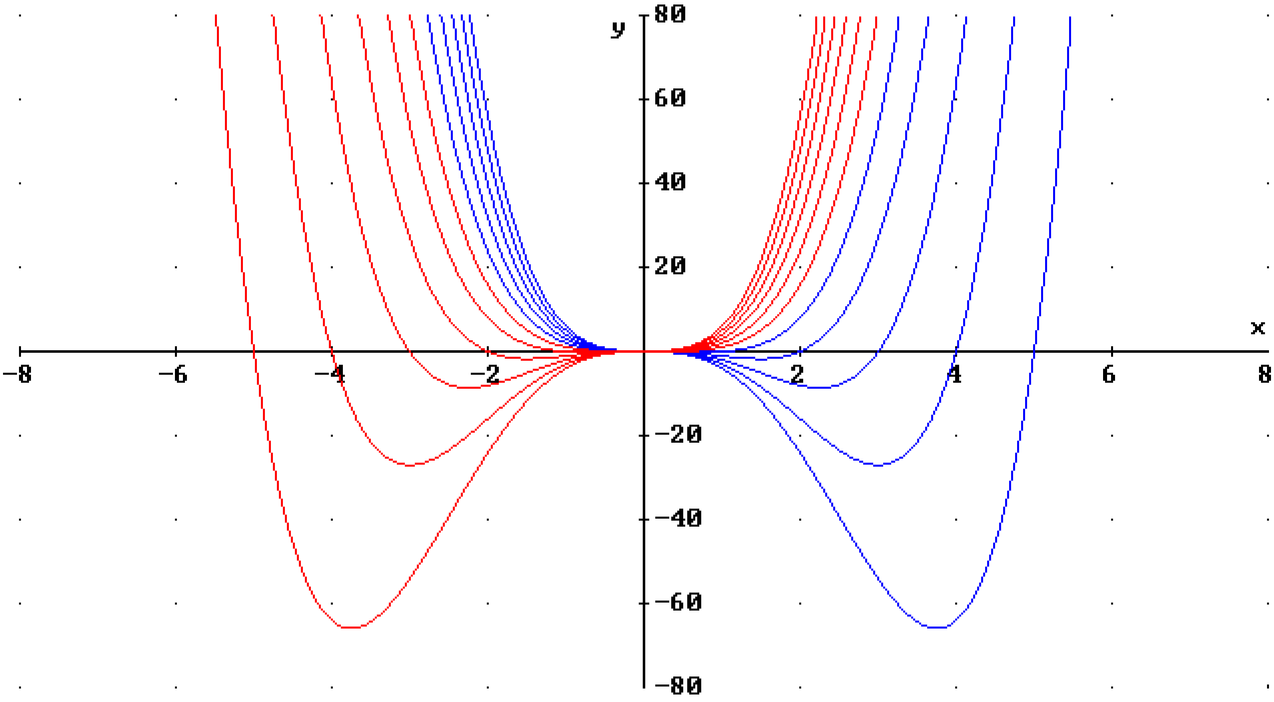
#1: $f(x, k) := x^4 + k \cdot x^3$

mit kIR .

Aufgabe
a) Zeichne die Graphen der Funktionenschar für k = -5, -4,...,4 ,5.

#2: $\text{VECTOR}(f(x, k), k, -5, 0) = [x^4 - 5 \cdot x^3, x^4 - 4 \cdot x^3, x^4 - 3 \cdot x^3, x^4 - 2 \cdot x^3, x^4 - x^3, x^4]$

#3: $\text{VECTOR}(f(x, k), k, 0, 5) = [x^4, x^4 + x^3, x^4 + 2 \cdot x^3, x^4 + 3 \cdot x^3, x^4 + 4 \cdot x^3, x^4 + 5 \cdot x^3]$



b) Berechne die Nullstellen und bestimme die Extrem- und Wendepunkte.

1. Nullstellen:

#4: $f(x, k) = 0$

#5: $x^3 \cdot (x + k) = 0$

#6: $x = -k \lor x = 0$

2. Ableitungen:

$$\#7: \quad f'(x, k) = 4\cdot x^3 + 3\cdot k\cdot x^2$$

$$\#8: \quad f''(x, k) = 12\cdot x^2 + 6\cdot k\cdot x$$

$$\#9: \quad f'''(x, k) = 24\cdot x + 6\cdot k$$

3. Extrempunkte: (Notwendige Bedingung)

$$\#10: \quad f'(x, k) = 0$$

$$\#11: \quad 4\cdot x^3 + 3\cdot k\cdot x^2 = 0$$

$$\#12: \quad x^2\cdot(4\cdot x + 3\cdot k) = 0$$

$$\#13: \quad x = -\frac{3\cdot k}{4} \vee x = 0$$

(Hinreichende Bedingung)

$$\#14: \quad f''\left(-\frac{3}{4}\cdot k, k\right) = \frac{9\cdot k^2}{4}$$

Für k≠0 liegt an der Stelle x=-3/4k ein lokales Minimum vor.

$$\#15: \quad f\left(-\frac{3}{4}\cdot k, k\right) = -\frac{27\cdot k^4}{256}$$

Der Tiefpunkt hat die Koordinaten T(-3/4 k , -27/256 k^4).

Für k=0 ist f(x,0)=x^4. Hier ist O(0|0) ebenfalls Tiefpunkt. Dieser Punkt kann auch für k=0 in der oben angegebenen Form geschrieben werden.

$$\#16: \quad f''(0, k) = 0$$

Für Werte, die nahe bei 0 liegen ist 4x + 3k>0 falls k>0 und 4x + 3k<0 falls k<0.
An der Stelle x=0 liegt also kein Extrempunkt.

4. Wendepunkte (Hinreichende Bedingung):

$$\#17: \quad f''(x, k) = 0$$

$$\#18: \quad 12\cdot x^2 + 6\cdot k\cdot x = 0$$

$$\#19: \quad 6\cdot x\cdot(2\cdot x + k) = 0$$

$$\#20: \quad x = -\frac{k}{2} \vee x = 0$$

(Hinreichende Bedingung):

$$\#21: \quad f'''\left(-\frac{k}{2},\ k\right) = -6\cdot k$$

$$\#22: \quad f'''(0,\ k) = 6\cdot k$$

Falls k≠0 liegt an der Stelle x=0 ein Sattelpunkt und an der Stelle x=-k/2 ein Wendepunkt vor.
Falls k=0 ist f(x,0)=x^4. Der Graph hat dann keinen Wendepunkt.

$$\#23: \quad f\left(-\frac{k}{2},\ k\right) = -\frac{k^4}{16}$$

$$\#24: \quad f(0,\ k) = 0$$

Die Koordinaten der Wendepunkte für k≠0 sind: W1(-k/2 | -k^4/16) und W2(0|0)

c) Die Tiefpunkte aller Funktionen liegen auf dem Graphen einer Funktion g. Bestimme g(x).

$$\#25: \quad x = -\frac{3}{4}\cdot k$$

$$\#26: \quad k = -\frac{4\cdot x}{3}$$

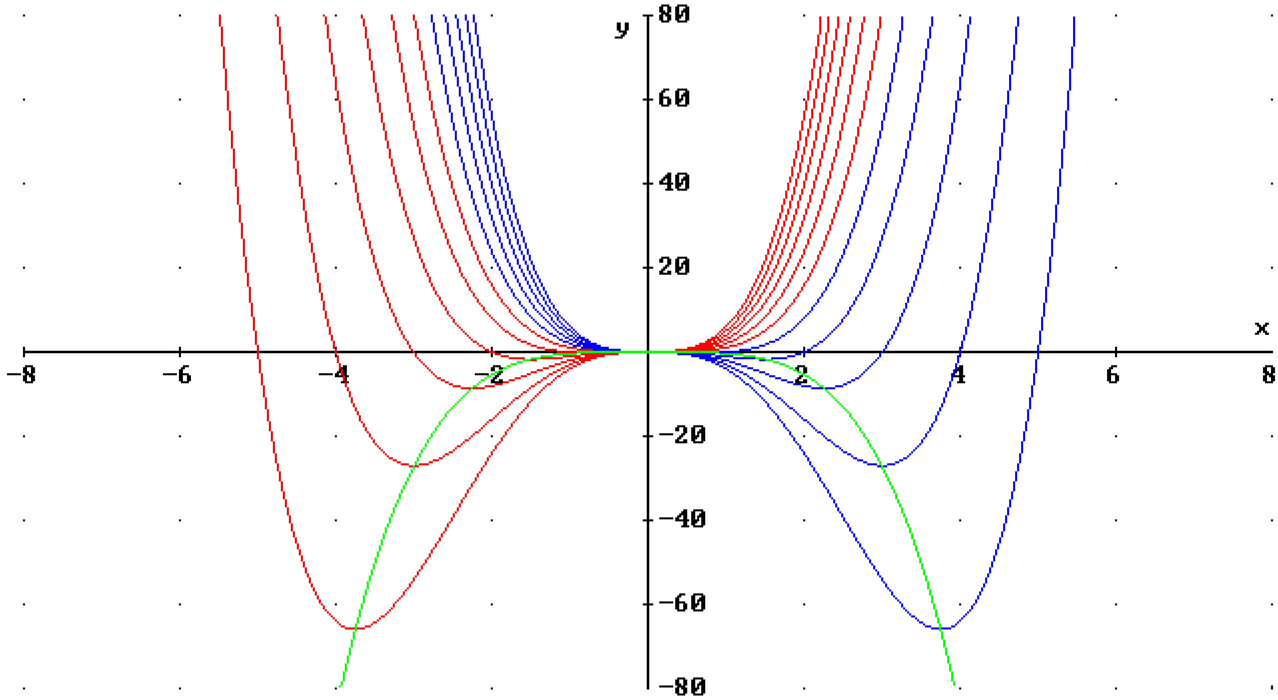
$$\#27: \quad y = -\frac{27\cdot k^4}{256}$$

$$\#28: \quad y = -\frac{27\cdot\left(-\frac{4\cdot x}{3}\right)^4}{256}$$

$$\#29: \quad y = -\frac{x^4}{3}$$

Die Funktionsgleichung lautet:

$$\#30: \quad g(x) := -\frac{x^4}{3}$$


y
80
60
40
20
x
-8
-6
-4
-2
2
4
6
8
-20
-40
-60
-80