Nullstellenbestimmung mit dem Newtonverfahren - Lösung

Für quadratische Gleichungen ist es immer möglich vorhandene Nullstellen mit dem Verfahren der quadratischen Ergänzung oder mit der p/q-Formel zu berechnen. Schon bei ganzrationalen Funktionen dritten Grades tauchen jedoch oft Schwierigkeiten auf.

Ist es nicht möglich die Nullstellen einer Funktion exakt zu berechnen, sollen nun Näherungen ermittelt werden.

Da wir im folgenden numerische Berechnungen durchführen müssen und uns dezimale Ergebnisse interessieren, stelle zunächst mit *Definieren - Verienfachungsoptionen - Genauigkeit* den Modus auf Approximate.

#1: Precision := Approximate

Aufgabe 1

Betrachte die durch

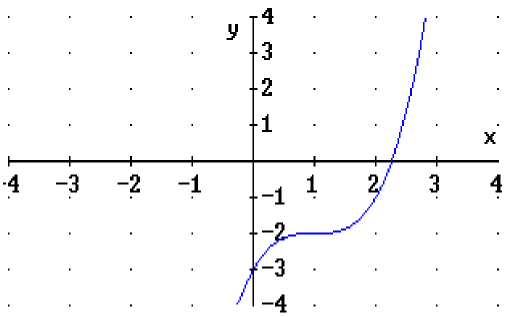
#2: $F(x) := x^3 - 3\cdot x^2 + 3\cdot x - 3$

gegebene Funktion. Begründe, dass sie eine Nullstelle hat. Zeichne den Graphen und gib einen groben Näherungswert x0 für die Nullstelle an.

Jede ganzrationale Funktion 3. Grades besitzt mindestens eine Nullstelle.
Wertetabelle:

#3: $\text{VECTOR}([x, F(x)], x, 0, 5)` = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ -3 & -2 & -1 & 6 & 25 & 62 \end{bmatrix}$

Graph:



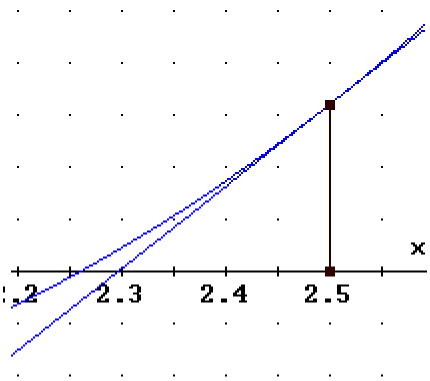
Die Nullstelle liegt zwischen x=2 und x=3. Als Näherungswert kann man x0=2.25 im Spurmodus am Graphen ablesen.

Aufgabe 2

Bestimme die Gleichung der Tangente an den Graphen von f im Punkt P(2.5 | f(2.5)).
Ihre Nullstelle x1 ist ein Näherungswert für die gesuchte Nullstelle von f. Gib die Nullstelle der Tangente an.

#4: $T1(x) := F'(2.5)\cdot(x - 2.5) + F(2.5)$

#5: $T1(x) := 6.75\cdot x - 15.5$



#6:   T1(x) = 0

#7:   6.75·x - 15.5 = 0

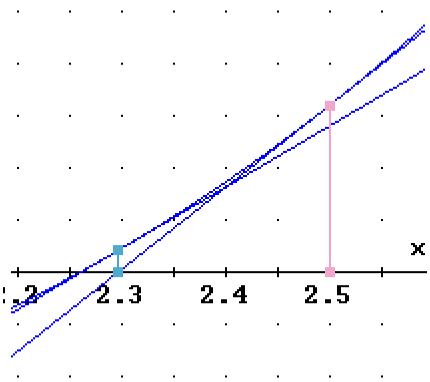
#8:   [x = 2.29629]

Aufgabe 3

Wende das Verfahren erneut an für die Tangente an den Graphen von f im Punkt Q(x1 | f(x1)). x1 ist dabei die Nullstelle der Tangente aus Aufgabe 2.

#9:   T2(x) := F'(2.29629)·(x - 2.29629) + F(2.29629)

#10:   T2(x) := 5.04109·x - 11.3975



#11:   T2(x) = 0

#12:   5.04109·x - 11.3975 = 0

#13:   [x = 2.26091]

Aufgabe 4

a) Leite allgemein eine Gleichung für die Nullstelle der Tangente an den Graphen im Punkt (xn | f (xn)) her.

#14:   F(x) :=

#15:   xn :=

#16:   F'(xn)·(x - xn) + F(xn) = 0

#17: $\left[x = xn - \dfrac{F(xn)}{F'(xn)}\right]$

Damit kann der (n+1)-te Näherungswert aus dem n-ten Näherungswert berechnet werden. Es werden dabei immer wieder dieselben Rechenvorschriften angewendet. Ein solches Verfahren wird als iteratives Verfahren bezeichnet.

b) Führe einige Schritte des Newton-Verfahrens mit Excel durch. Vervollständige dazu das folgende Datenblatt.

n	xn	f(xn)	f'(xn)	f(xn)/f'(xn)	xn+1
0	2,5	1,375	6,75	0,203703704	2,296296296
1	2,296296296	0,178275669	5,041152263	0,035364072	2,260932225
2	2,260932225	0,004819286	4,769850226	0,001010364	2,259921861
3	2,259921861	3,86058E-06	4,762209284	8,10671E-07	2,25992105
4	2,25992105	2,48512E-12	4,762203156	5,21843E-13	2,25992105

c) Informiere Dich in der Derive-Hilfe über den iterates- und den iterate-Befehl und führe damit Näherungsberechnungen für die Nullstelle von f durch. Vergleiche das Ergebnis mit der von Derive approximierten Lösung von f(x)=0.

#18: $F(x) := x^3 - 3\cdot x^2 + 3\cdot x - 3$

#19: $\mathrm{ITERATES}\left(xn - \dfrac{F(xn)}{F'(xn)},\ xn,\ 2.5,\ 3\right) = [2.5,\ 2.296296296,\ 2.260932224,\ 2.25992186]$

#20: $\mathrm{ITERATES}\left(xn - \dfrac{F(xn)}{F'(xn)},\ xn,\ 2.5\right) = [2.5,\ 2.296296296,\ 2.260932224,\ 2.25992186,\ 2.259921049,\ 2.259921049,\ 2.259921049,\ 2.259921049,\ 2.259921049]$

#21: $\mathrm{ITERATE}\left(xn - \dfrac{F(xn)}{F'(xn)},\ xn,\ 2.5,\ 5\right) = 2.259921049$

Vergleiche mit dem von DERIVE beim Approximieren berechneten Näherungswert.

#22: APPROX(SOLVE(F(x) = 0, x, Real))

#23: $x = 2.259921049$

Mögliche Vertiefungen

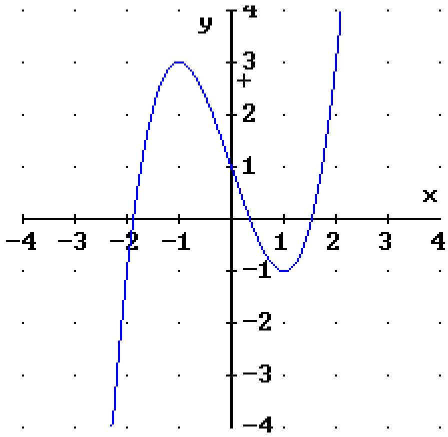
Definition einer Funktion für das Newtonverfahren: a gibt den Startwert und n die Anzahl der Iterationsschritte an.

#24: $\text{NEWTON}(a, n) := \text{ITERATES}\left(xn - \dfrac{F(xn)}{F'(xn)}, xn, a, n\right)$

#25: NEWTON(2.5, 3) = [2.5, 2.296296296, 2.260932224, 2.25992186]

Ein weiteres Beispiel:

#26: $F(x) := x^3 - 3\cdot x + 1$



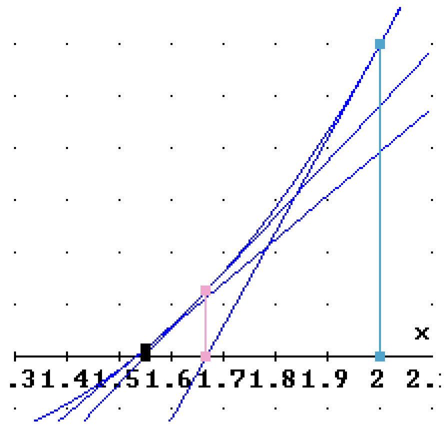
Funktionen zum Zeichnen von Tangenten:

#27: $\text{TANG}(x, xn) := F'(xn)\cdot(x - xn) + F(xn)$

#28: $R(n) := \text{ITERATE}\left(xn - \dfrac{F(xn)}{F'(xn)}, xn, 2, n\right)$

#29: VECTOR(TANG(x, R(n)), n, 0, 2)

#30: $\text{VECTOR}\left(\begin{bmatrix} R(n) & 0 \\ R(n) & F(R(n)) \end{bmatrix}, n, 0, 2\right)$



Achtung: Das Newton-Verfahren konvergiert nicht immer gegen die Nullstelle.
Hinreichende Konvergenzbedingung (Beweis mit dem Kontraktionssatz):

$$f'(x) \neq 0 \wedge \left| f(x)\frac{f''(x)}{(f'(x))^2} \right| < 1 \quad \text{füralle } x \in [a,b]$$

#31: $F(x) := \mathrm{ATAN}(x)$

#32: $\mathrm{NEWTON}(2, 5) = [2, -3.535743588, 13.95095908, -279.3440665, 1.220169989\cdot 10^{5}, -2.33860042\cdot 10^{10}]$

#33: $\mathrm{NEWTON}(1, 5) = [1, -0.5707963267, 0.1168599039, -0.001061022116, 7.963072392\cdot 10^{-10}, 1.776205096\cdot 10^{-21}]$

#34: $\left|\dfrac{F(x)\cdot F''(x)}{F'(x)^2}\right| = 2\cdot x\cdot \mathrm{ATAN}(x)$

#35: $\left|\dfrac{F(2)\cdot F''(2)}{F'(2)^2}\right| = 4.42859$

#36: $\left|\dfrac{F(1)\cdot F''(1)}{F'(1)^2}\right| = 1.57079$

Vergleiche: Stoer, Numerische Mathematik 1, S. 254