Die e-Funktion - Lösung
Eine Exponentialfunktion mit besonderer Ableitung

Wir betrachten die Graphen der Funktionen:

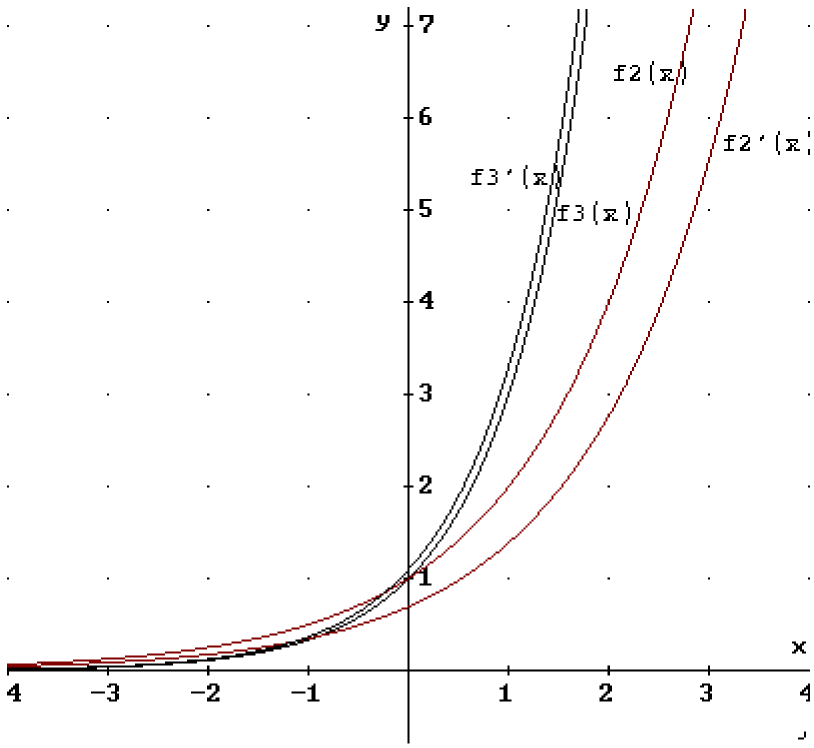
#1: $f2(x) := 2^x$

#2: $f3(x) := 3^x$

Aufgabe 1
Ergänze die Graphen der Ableitungsfuntionen f2' und f3' in dem Koordinatensystem. Äußere eine Vermutung für die Ableitung.

#3: $f2'(x) = 2^x \cdot LN(2)$

#4: $f3'(x) = 3^x \cdot LN(3)$



Vermutung: Die Graphen der Ableitungsfunktionen gehen durch Streckung parallel zur y-Achse aus den Graphen von f2 und f3 hervor..

Aufgabe 2

#5: $fb(x) := b^x$

a) Berechne die Ableitung von fb(x) allgemein mit Hilfe des Differenzenquotieneten und beweise damit Deine Vermutung aus Aufgabe 1.

#6: $$\frac{b^{x+h} - b^{x}}{h} = \frac{b^{h} - 1}{h} \cdot b^{x}$$

#7: $$fb'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{b^{x+h} - b^{x}}{h} = \left(\lim_{h \to 0} \frac{b^{h} - 1}{h} \right) \cdot b^{x}$$

b) Begründe den folgenden Satz:

> Die Ableitung einer Exponentialfunktion f_b mit $f_b(x) = b^x$ für $b \in IR^+ \setminus \{1\}$ ist
> $$f_b'(x) = f_b'(0) \cdot b^x .$$
> Der Graph der Ableitungsfunktion geht aus dem Graphen von f_b durch eine Streckung parallel zur 2. Achse hervor.

#8: $$\lim_{h \to 0} \frac{b^{h} - 1}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{b^{h} - b^{0}}{h - 0} = fb'(0)$$

Aufgabe 3

Wir suchen eine Basis b, für die die Ableitung der Exponentialfunktion mit der Exponentialfunktion selbst übereinstimmt.
Für diesen Wert von b muß dann gelten: fb'(0)=1

a) Zeichne in das folgende Koordinatensystem die Graphen verschiedener Exponentialfunktionen. Ermittle damit einen Näherungswert für die Basis derjenigen Exponentialfunktion, deren Graph die bereits eingezeichnete Gerade als Tangente an der Stelle 0 hat.

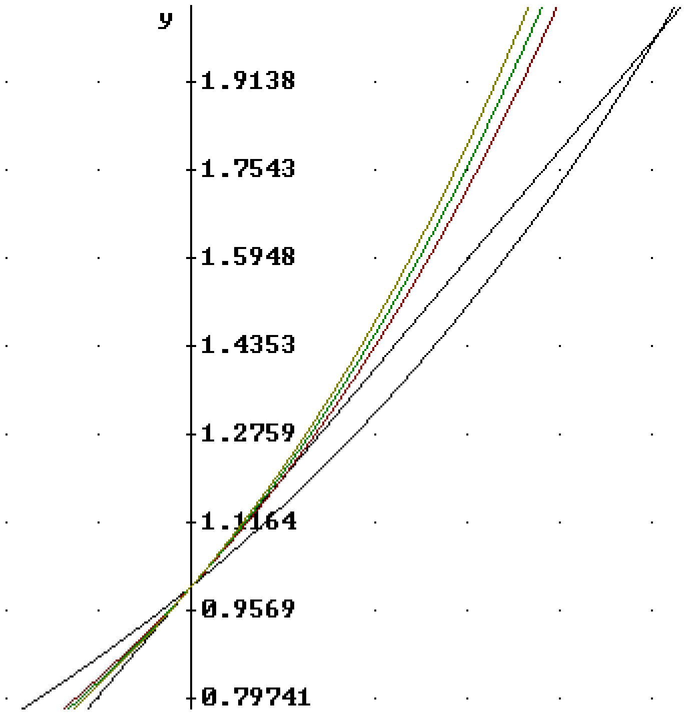
#9: $g(x) := x + 1$

#10: 2.5^{x}

#11: 2.6^{x}

#12: 2.7^{x}

#13: 2^{x}



Für f(x):=2.7^x ist die Gerade g(x):=x+1 näherungsweise eine Tangente.

b) Berechne den Differenzenquotienten aus Aufgabe 2 für h=1/1000 an der Stelle x=0 für verschieden Werte von b und bestimme damit einen Näherungswert für die gesuchte Basis.

#14: $DQ(b) := \dfrac{b^{0.001} - 1}{0.001} \cdot b^{0}$

#15: VECTOR([b, DQ(b)], b, 2, 3, 0.1)

#16:

2	0.6933874616
2.1	0.7422126489
2.2	0.7887682756
2.3	0.8332560877
2.4	0.875852072
2.5	0.9167106551
2.6	0.9559680912
2.7	0.9937452114
2.8	1.030149656
2.9	1.065277744
3	1.099215984

#17: VECTOR([b, DQ(b)], b, 2.7, 2.8, 0.01)

#18:

$$\begin{bmatrix} 2.7 & 0.9937452114 \\ 2.71 & 0.9974457538 \\ 2.72 & 1.001132677 \\ 2.73 & 1.004806089 \\ 2.74 & 1.008466078 \\ 2.75 & 1.012112752 \\ 2.76 & 1.015746201 \\ 2.77 & 1.019366521 \\ 2.78 & 1.022973809 \\ 2.79 & 1.026568155 \\ 2.8 & 1.030149656 \end{bmatrix}$$

#19: VECTOR([b, DQ(b)], b, 2.71, 2.72, 0.001)

#20:

$$\begin{bmatrix} 2.71 & 0.9974457538 \\ 2.711 & 0.9978150563 \\ 2.712 & 0.9981842257 \\ 2.713 & 0.9985532562 \\ 2.714 & 0.9989221526 \\ 2.715 & 0.9992909116 \\ 2.716 & 0.9996595367 \\ 2.717 & 1.000028025 \\ 2.718 & 1.000396376 \\ 2.719 & 1.000764595 \\ 2.72 & 1.001132677 \end{bmatrix}$$

Die gesuchte Basis liegt in der Nähe von 2.72.

Zusammenfassung:

Diejenige Basis, für welche die zugehörige Exponentialfunktion mit ihrer Ableitung übereinstimmt, wird mit e bezeichnet und ***Eulersche Zahl*** genannt.

Für die *Eulersche Zahl* e gilt: $e = \lim\limits_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 2{,}718281828459045...$

Die Exponentialfunktion mit $f(x) = e^x$ wird e-Funktion genannt. Die e-Funktion stimmt mit ihrer Ableitung überein: $f(x) = f'(x) = e^x$