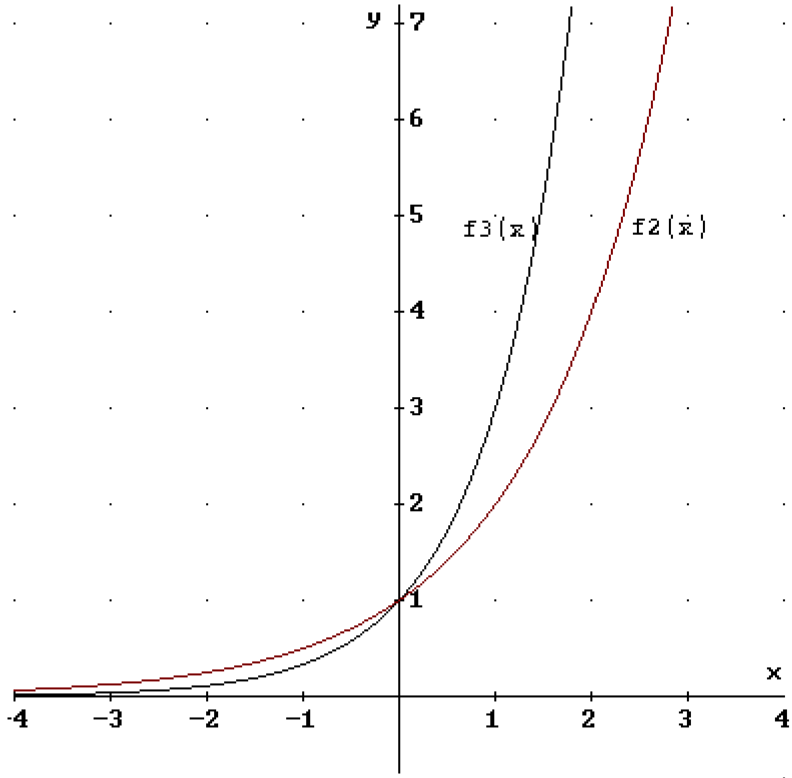
Die e-Funktion
Eine Exponentialfunktion mit besonderer Ableitung

Wir betrachten die Graphen der Funktionen:

#1: $f2(x) := 2^x$

#2: $f3(x) := 3^x$

Aufgabe 1
Ergänze die Graphen der Ableitungsfuntionen f2' und f3' in dem Koordinatensystem.
Äußere eine Vermutung für die Ableitung.



Aufgabe 2

#3: $fb(x) := b^x$

a) Berechne die Ableitung von fb(x) allgemein mit Hilfe des Differenzenquotieneten und beweise damit Deine Vermutung aus Aufgabe 1a.

b) Begründe den folgenden Satz:

Die Ableitung einer Exponentialfunktion f_b mit $f_b(x) = b^x$ für $b \in IR^+ \setminus \{1\}$ ist

$$f_b'(x) = f_b'(0) \cdot b^x .$$

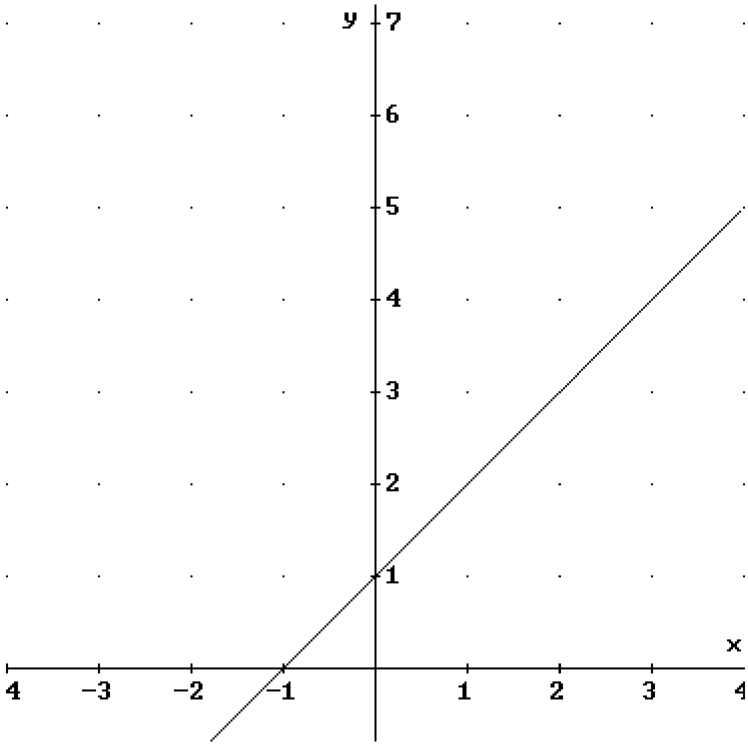
Der Graph der Ableitungsfunktion geht aus dem Graphen von f_b durch eine Streckung parallel zur 2. Achse hervor.

Aufgabe 3

Wir suchen eine Basis b, für die die Ableitung der Exponentialfunktion mit der Exponentialfunktion selbst übereinstimmt.
Für diesen Wert von b muß dann gelten: fb'(0)=1

a) Zeichne in das folgende Koordinatensystem die Graphen verschiedener Exponentialfunktionen.
Ermittle damit einen Näherungswert für die Basis derjenigen Exponentialfunktion, deren Graph die bereits eingezeichnete Gerade als Tangente an der Stelle 0 hat.

```
#4:   g(x) := x + 1
```



b) Berechne den Differenzenquotienten aus Aufgabe 2 für h=1/1000 an der Stelle x= 0 für verschieden Werte von b und bestimme damit einen Näherungswert für die gesuchte Basis.

Zusammenfassung:

Diejenige Basis, für welche die zugehörige Exponentialfunktion mit ihrer Ableitung übereinstimmt, wird mit e bezeichnet und ***Eulersche Zahl*** genannt.

Für die *Eulersche Zahl* e gilt: $e = \lim_{n \to \infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 2{,}718281828459045...$

Die Exponentialfunktion mit $f(x) = e^x$ wird e-Funktion genannt. Die e-Funktion stimmt mit ihrer Ableitung überein: $f(x) = f'(x) = e^x$