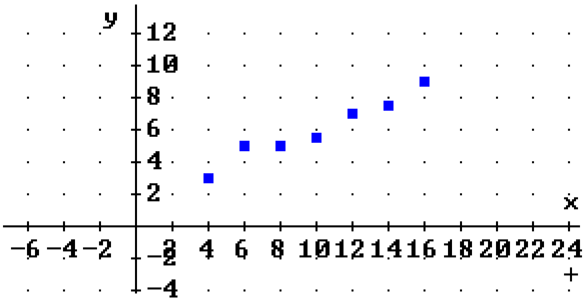
Ausgleichsgeraden mit DERIVE

Zunächst werden die vorgegebenen Punkte als Matrix eingegeben und im 2D-Graphik-Fenster gezeichnet.

$$\#1: \quad \text{Punkte} := \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 6 & 5 \\ 8 & 5 \\ 10 & 5.5 \\ 12 & 7 \\ 14 & 7.5 \\ 16 & 9 \end{bmatrix}$$



Die zu bestimmende Ausgleichsgerade verläuft durch den Schwerpunkt S der Punkte.
Zur Bestimmung von S berechne wir die Mittelwerte der x- und y-Koordinaten der Punkte:

$$\#2: \quad \text{x\_quer} := \frac{4 + 6 + 8 + 10 + 12 + 14 + 16}{7}$$

$$\#3: \quad \text{x\_quer} = 10$$

$$\#4: \quad \text{y\_quer} := \frac{3 + 5 + 5 + 5.5 + 7 + 7.5 + 9}{7}$$

$$\#5: \quad \text{y\_quer} = 6$$

Der Schwerpunkt ist also S(10|6). Damit lautet die Gleichung der Ausgleichsgerade:

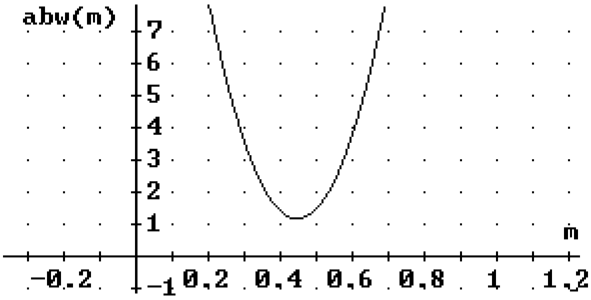
$$\#6: \quad g(x) := m\cdot(x - \text{x\_quer}) + \text{y\_quer}$$

$$\#7: \quad g(x) = m\cdot(x - 10) + 6$$

In dieser Gleichung ist nun die Steigung m so zu bestimmen, dass die Summe der qaudratischen Abweichungen minimal ist.
Wir berechnen für jeden Punkt die quadratische Abweichung von der Gerade in Abhängigkeit von m und bilden die Summe:

$$\#8: \quad \text{abw}(m) := (g(4) - 3)^2 + (g(6) - 5)^2 + (g(8) - 5)^2 + (g(10) - 5.5)^2 + (g(12) - 7)^2 + (g(14) - 7.5)^2 + (g(16) - 9)^2$$

$$\#9: \quad abw(m) = \frac{224 \cdot m^2 - 200 \cdot m + 47}{2}$$



Nun ist diejenige Steigung m zu bestimmen, für die die Summe der quadratischen Abweichungen minimal ist. Wir suchen also die erste Koordinate des Scheitelpunktes der Koordinate.
Scheitelpunktbestimmung:

$$\#10: \quad \frac{224 \cdot m^2 - 200 \cdot m + 47}{2}$$

$$\#11: \quad 112 \cdot \left(m^2 - \frac{25}{28} \cdot m\right) + \frac{47}{2}$$

$$\#12: \quad 112 \cdot \left(m^2 - \frac{25}{28} \cdot m + \left(\frac{25}{56}\right)^2\right) - 112 \cdot \left(\frac{25}{56}\right)^2 + \frac{47}{2}$$

$$\#13: \quad 112 \cdot \left(m^2 - \frac{25}{28} \cdot m + \left(\frac{25}{56}\right)^2\right) + \frac{33}{28}$$

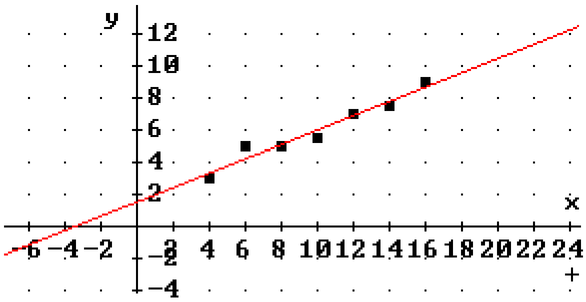
$$\#14: \quad 112 \cdot \left(m - \frac{25}{56}\right) + \frac{33}{28}$$

Die erste Koordinate des Scheitelpunktes m=25/56 ist die gesuchte Steigung. Sie beträgt etwa 0,4464.
Hiermit haben wir auch die Gleichung der Ausgleichsgerade. (Setze m in g(x) ein.)

$$\#15: \quad g(x) = \frac{25}{56} \cdot (x - 10) + 6$$

$$\#16: \quad g(x) = \frac{25 \cdot x}{56} + \frac{43}{28}$$

$$\#17: \quad g(x) = 0.4464 \cdot x + 1.5357$$



Bemerkungen:

1.) Die Bestimmung des Scheitelpunktes ist auch mit der Differentialrechnung (die in der Jahrgangsstufe 11/I jedoch noch nicht bekannt ist) möglich:

#18: $abw'(m) = 0$

#19: $4\cdot(56\cdot m - 25) = 0$

#20: $m = \dfrac{25}{56}$

#21: $abw''(m) = 224$

Da abw'(25/56)=0 und abw''(25/56)>0 ist, liegt an der Stelle 25/56 ein lokales Minimum vor.

2.) Mit den folgenden etwas unübersichtlichen Befehlen kann man sich die aufwendige Eingabe der Summen erleichtern:

#22: $x\_quer := \dfrac{\sum_{k=1}^{DIMENSION(Punkte)} Punkte_{k,1}}{DIMENSION(Punkte)}$

#23: $y\_quer := \dfrac{\sum_{k=1}^{DIMENSION(Punkte)} Punkte_{k,2}}{DIMENSION(Punkte)}$

#24: $g(x) := m\cdot(x - x\_quer) + y\_quer$

#25: $abw(m) := \sum_{k=1}^{DIMENSION(Punkte)} (g(Punkte_{k,1}) - Punkte_{k,2})^2$

3.) DERIVE berechnet die Ausgleichsgerade auch mit einem einzigen Befehl:

#26: $FIT([x, m\cdot x + b], Punkte) = \dfrac{25\cdot x}{56} + \dfrac{43}{28}$